

2.7.27 Použití substituce pro řešení nerovnic II

Předpoklady: 020724, 020725, 020726

Pedagogická poznámka: Platí to samé, co pro předchozí hodinu. Skvělé cvičení na orientaci v příkladu, přehledný zápis a schopnost řešit podpříklady. V tomto směru jedna z nejtěžších hodin v celém studiu.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sqrt{(x^2 + 3x)^2 + 2} < x^2 + 3x + 2$.

Po umocnění by nerovnice obsahovala x^4 , ale vhodnou substitucí stupeň mocniny x snížíme.

Substituce: použijeme $y = x^2 + 3x \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $\sqrt{y^2 + 2} < y + 2$, použijeme metodu nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice (místa přetržení)

levá strana: odmocnina $y^2 + 2 \geq 0$, platí vždy, protože $y^2 \geq 0$ - neexistují žádné body přetržení.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{y^2 + 2} = y + 2$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu x .

$$\sqrt{y^2 + 2} = y + 2 \quad /^2$$

$$(\sqrt{y^2 + 2})^2 = (y + 2)^2$$

$$y^2 + 2 = y^2 + 4y + 4$$

$$4y = -2$$

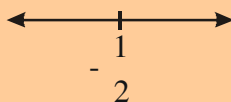
$$y = -\frac{1}{2}$$

Zkouška: $y = -\frac{1}{2}$

$$L = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$P = y + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$L = P$$



Zakreslíme získaný kořen na osu:

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

interval $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$: vybereme číslo například -1:

$$\sqrt{y^2+2} < y+2 \qquad \sqrt{(-1)^2+2} < -1+2$$

$\sqrt{3} < 1$ - neplatí \Rightarrow interval $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ není řešením

interval $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$: vybereme číslo například 0:

$$\sqrt{y^2+2} < y+2 \qquad \sqrt{0^2+2} < 0+2$$

$\sqrt{2} < 2$ - platí \Rightarrow interval $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ je řešením

$$y \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 + 3x = y \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Přepíšeme interval hodnot $x^2 + 3x$ pomocí nerovnice:

$$x^2 + 3x = y > -\frac{1}{2} \text{ - řešíme nerovnici } x^2 + 3x > -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 3x > -\frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

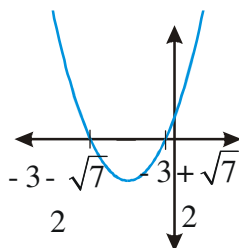
$$2x^2 + 6x + 1 > 0$$

Zjistíme průsečíky s osou x :

$$2x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$$



hledám body nad osou x

$$K = \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}; \infty\right)$$

Pedagogická poznámka: Substituovanou rovnicí je možné řešit také umocňováním (dělá to tak většina studentů), v tom případě pak je nutné trvat na rozboru znamének obou stran nerovnice.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $(u-2)^2 - 3|u-2| + 2 < 0$.

Substituce: $x = (u-2)$ by moc nepomohlo, ale číslo $(u-2)^2$ je vždy kladné stejně jako číslo $|u-2|^2$ (je jedno, jestli znaménko zmizí kvůli absolutní hodnotě nebo kvůli umocnění), platí tedy $(u-2)^2 = |u-2|^2$, nerovnici můžeme napsat $|u-2|^2 - 3|u-2| + 2 < 0$, použijeme substituci

$$x = |u-2| \Rightarrow \text{Řešíme nerovnici: } x^2 - 3x + 2 < 0.$$

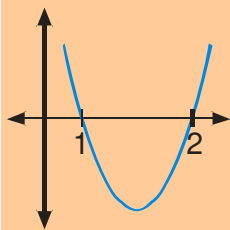
Zjistíme průsečíky grafu s osou x :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$



Hledáme body pod osou $x \Rightarrow x \in (1; 2)$

Návrat k původní proměnné:

$$|u-2| = x \in (1; 2)$$

Přepíšeme interval hodnot $|u-2|$ pomocí nerovnic:

$$|u-2| \in (1; 2) \Leftrightarrow |u-2| > 1 \text{ a zároveň } |u-2| < 2$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.

$$|u-2| > 1$$

Zjistíme, kdy je vnitřek absolutní hodnoty roven nule: $u-2=0 \Rightarrow u=2$ a rozdělíme na intervaly podle znaménka vnitřku:

$$u \in (-\infty; 2) \Rightarrow u-2 \leq 0 \Rightarrow |u-2| = -u+2$$

$$-u+2 > 1$$

$$1 > u$$

$$u \in \langle 2; \infty) \Rightarrow u-2 \geq 0 \Rightarrow |u-2| = u-2$$

$$u-2 > 1$$

$$u > 3$$

$$K_1 = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$$

$$|u-2| < 2$$

Zjistíme, kdy je vnitřek absolutní hodnoty roven nule: $u-2=0 \Rightarrow u=2$ a rozdělíme na intervaly podle znaménka vnitřku:

$$u \in (-\infty; 2) \Rightarrow u-2 \leq 0 \Rightarrow |u-2| = -u+2$$

$$-u+2 < 2$$

$$0 < u$$

$$u \in \langle 2; \infty) \Rightarrow u-2 \geq 0 \Rightarrow |u-2| = u-2$$

$$u-2 < 2$$

$$u < 4$$

$$K_2 = (0; 4)$$

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$ a $K_2 = (0; 4)$ (u musí splňovat obě podmínky).

Nakreslíme si osu a najdeme průnik:



$$K = K_1 \cap K_2 = (0; 1) \cup (3; 4)$$

Poznámka: Dopočítávání příkladu by se dalo zrychlit použitím definice absolutní hodnoty:

$ u-2 > 1$	$ u-2 < 2$
Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose \Rightarrow hledáme čísla jejichž obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny více než o jeden.	Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose \Rightarrow hledáme čísla jejichž obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny méně než o dva.
$K_1 = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$	$K_2 = (0; 4)$

Pedagogická poznámka: Substituce u předchozího příkladu není samozřejmá, a pokud si ji studenti nepamatují, budou potřebovat Vaši pomoc.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 7\frac{x+1}{x-1} + 12 \geq 0$.

Podmínka $x \neq 1$,

Substituce: $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 \geq 0$.

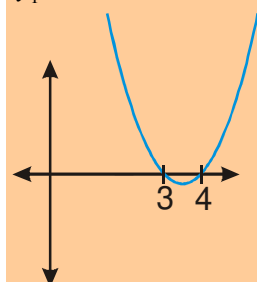
Zjistíme průsečíky grafu s osou x :

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$(y-3)(y-4) = 0$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 4$$



Hledáme body nad osou x :

$$y \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x+1}{x-1} = y \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$$

Přepíšeme intervaly hodnot $\frac{x+1}{x-1}$ pomocí nerovnic:

$$\frac{x+1}{x-1} \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 3 \text{ nebo } \frac{x+1}{x-1} \geq 4$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, protože stačí, když platí jedna z nich, konečný výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 3$$

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 3 \quad / \cdot (x-1) \text{ výraz, kterým násobíme,}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 4$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 4 \quad / \cdot (x-1) \text{ výraz, kterým násobíme,}$$

<p>může být kladný i záporný \Rightarrow rozdělíme R na intervaly podle znaménka výrazu, abychom věděli, zda obracet znaménko:</p> <p>$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:</p> $x + 1 \geq 3(x - 1)$ $x + 1 \geq 3x - 3$ $4 \geq 2x$ $2 \geq x$ $K_{11} = (-\infty; 1)$ <p>$x \in (1; \infty) \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:</p> $x + 1 \leq 3(x - 1)$ $x + 1 \leq 3x - 3$ $4 \leq 2x$ $2 \leq x$ $K_{12} = \langle 2; \infty \rangle$ $K_1 = (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$	<p>může být kladný i záporný \Rightarrow rozdělíme R na intervaly podle znaménka výrazu, abychom věděli, zda obracet znaménko:</p> <p>$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:</p> $x + 1 \leq 4(x - 1)$ $x + 1 \leq 4x - 4$ $5 \leq 3x$ $\frac{5}{3} \leq x$ $K_{21} = \emptyset$ <p>$x \in (1; \infty) \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:</p> $x + 1 \geq 4(x - 1)$ $x + 1 \geq 4x - 4$ $5 \geq 3x$ $\frac{5}{3} \geq x$ $K_{22} = \left(1; \frac{5}{3} \right)$ $K_2 = \left(1; \frac{5}{3} \right)$
---	--

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$ a $K_2 = \left(1; \frac{5}{3} \right)$.

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3} \right) \cup \langle 2; \infty \rangle$$

Shrnutí: Někdy je nejdůležitější neztratit se.